Colles de Maths - semaine 6 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Convergence simple et convergence uniforme

Exercice 1
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2
Montrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{C}$ pour $n \geqslant 1$ par $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Exercice 3
Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions

$$f_n(x) = (-1)^n \sin^{\circ n}(x)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ ($\circ n$ signifie composée n fois).

Exercice 4
Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorèmes d'interversion

Exercice 5
Déterminer $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$.

Exercice 6
Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ et $a > 0$. Déterminer $\lim_{a\to 0^+} \displaystyle\int_0^a \frac{f(t)}{\sqrt{t\,(a-t)}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7
Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 8
Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha + 1}.$$

En déduire une expression de $\ln 2$ sous forme de série.

Approximation uniforme

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite en $+\infty$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-nt}\, \mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 10
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Que dire de f ?

Exercice 11
Soit $a < b$ et $x_1, ..., x_n$ des points distincts de $[a, b]$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une suite de polynômes qui coïncident avec f en les x_k et qui converge uniformément vers f.

Exercice 12
Soit $d \in \mathbb{N}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales de degré au plus d, qui converge simplement sur $\mathbb{R}$. Montrer que la limite est une fonction polynomiale de degré au plus d, et que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.